https://doi.org/10.23925/2237-9657.2025.v14i1p240-256

# O fractal Triângulo de Sierpinski no GeoGebra e o comando iteração

## The Sierpinski Triangle fractal in GeoGebra and the iteration command

ION MOUTINHO[1]

https://orcid.org/0000-0002-4040-3803

**RESUMO**

*Fractais são objeto de interesse entre criadores de construções no GeoGebra e para o processo de ensino e aprendizagem de Matemática na escola. Percebendo que esse tipo de construção, em geral, é baseado na repetição de comandos, nos propusemos a obter, a partir de uma pesquisa exploratória, uma construção que represente o fractal Triângulo de Sierpinski sem repetição de comandos. Realizamos a tarefa utilizando o comando Iteração() do GeoGebra. Analisamos a simplicidade, eficiência e versatilidade da construção obtida e discutimos sobre seu potencial didático.*

**Palavras-chave:** *Triângulo de Sierpinski; Fractal; GeoGebra; Iteração.*

**ABSTRACT**

*Fractals have garnered significant interest within the GeoGebra community and in the educational context of mathematics. Given that the construction of fractals typically involves iterative processes, this study aimed to develop a novel approach to represent the Sierpinski Triangle without explicit command repetition. Utilizing GeoGebra's Iteration() function, we successfully constructed the fractal. The simplicity, efficiency, and adaptability of this method were evaluated, and its potential pedagogical implications are discussed.*

**Key-words:** *Sierpinski Triangle; Fractal; GeoGebra; Iteration.*

## Introdução

Computadores são extremamente úteis para a automação de tarefas repetitivas, pois economizam tempo e não cometem erros. Inclusive, dentro desse assunto, encontramos, em programação computacional, uma noção de boa prática que diz que não se repetem instruções ao se escrever um código. A ideia é que o programador

[1] Universidade Federal Fluminense – ionmg@id.uff.br

deve procurar meios de simplificar a escrita do código utilizando estruturas de repetição já fornecidas pela linguagem de programação.

Na Matemática encontramos inúmeros procedimentos que se baseiam em instruções repetitivas, como o algoritmo de Euclides para a determinação do máximo divisor comum de dois números ou o procedimento de determinação de um dado termo de uma progressão aritmética. Neste último caso, o procedimento de repetição é dado pela adição sucessiva da razão a partir do primeiro termo da sequência. O programa GeoGebra, muito utilizado em estudos matemáticos, oferece estruturas de repetição para serem aplicadas em suas construções, inclusive em procedimentos matemáticos.

O tema Fractal é de interesse em pesquisas de diversas áreas, inclusive em Ensino de Matemática e em Educação Matemática, e envolve, naturalmente, ações iterativas, ou de repetição. Friske e Mathias (2015) e Wanderley, Souto, Didier e Tanaka (2021), em publicações voltadas para o ensino de Matemática, abordam a questão da elaboração de construções no GeoGebra de alguns fractais famosos. Contudo, chama-se a atenção para o fato de que as construções apresentadas ainda fazem uso repetitivo de procedimentos e de comandos, perdendo-se a oportunidade de explorar melhor as estruturas de repetição do GeoGebra ao não ter em conta essa questão.

Ao longo de uma revisão de literatura, procurando por artigos sobre a produção de fractais no GeoGebra, vídeos no repositório do YouTube e construções no repositório do GeoGebra.org, percebemos que um cenário mais geral não é diferente. Dessa forma, nos interessamos pela questão de poder obter novas construções no GeoGebra de fractais que não apresentem instruções e comandos repetidos. Estamos particularmente interessados na utilização do comando Iteração() nesse processo.

A construção de modelos de fractais por meio de programas de computador é um assunto bastante amplo e com muitas possibilidades, pois essas figuras podem ser obtidas segundo diferentes tipos de construção e programas de computador estão em constante mudança. Desse modo, se torna pertinente investigar sobre o assunto por meio de uma pesquisa exploratória, pois queremos desenvolver maior familiaridade com o que se sabe até o momento. Segundo Gil (2002), esse tipo de pesquisa pode se desenvolver por meio de uma pesquisa documental, a fim de obter um panorama mais amplo do conhecimento, e pela análise de exemplos que estimulem a compreensão do assunto de interesse. Para esse fim, definimos como objetivo analisar o caso do Triângulo de Sierpinski e, investigando construções realizadas no GeoGebra desse fractal, buscamos meios de utilizar o comando Iteração() e de obter uma construção que possa oferecer vantagens.

Neste artigo, após considerações teóricas, apresentamos um panorama sobre pesquisas relacionadas com o Triângulo de Sierpinski no GeoGebra e, como resultado desse estudo, apresentamos nossa construção baseada na utilização do comando Iteração(). Por fim, exploramos a construção obtida e discutimos sobre seu potencial didático.

## 1. Fundamentação teórica

Nesta seção apresentamos o comando de iteração do GeoGebra e explicamos o conceito de fractal, além de estabelecer um algoritmo para o Triângulo de Sierpinski.

### 1.1 Os comandos Sequência() e Iteração() no GeoGebra

Usamos o termo iteração quando nos referimos a tarefas repetitivas em Matemática e em Computação. Vemos em dicionários que iteração é sinônimo de repetição, mas, em Matemática, pode ter um significado um pouco mais específico, dependendo do contexto. Uma noção, utilizada de forma bastante ampla, como em Análise Numérica, é que iteração se refere à aplicação repetida de operações - funcionais ou procedimentais - onde o resultado de cada iteração, ou etapa de repetição, é utilizado como dado de entrada na etapa seguinte. Por exemplo, a multiplicação por um número natural pode ser entendida como o resultado de iterações da operação de adição: $4 \times 3 = 3 + (3 + (3 + 3))$ - são três iterações da adição de 3 - ou, em setas que indicam a realização da etapa, $3 \rightarrow 3 + 3 = 6 \rightarrow 3 + 6 = 9 \rightarrow 3 + 9 = 12$, sendo que as iterações produziram os resultados 6, 9 e 12, respectivamente.

Em computação, o termo iteração é utilizado de forma semelhante, e às vezes de modo um pouco mais geral. Nesse último caso, entende-se iteração como a execução repetida de uma sequência de instruções, ou comandos, normalmente dentro de um mecanismo computacional que gerencia as repetições e indica a etapa de repetição e quando deve parar. Encontramos pelo menos dois comandos que permitem iteração no GeoGebra, a saber: Sequência() e Iteração(), além de ListaDeIteração() - este último é basicamente o mesmo que o anterior, a diferença é que ele guarda os resultados de cada iteração em uma lista.

O comando Sequência() fornece listas de objetos, mas pode ser visto como um gerenciador de execuções repetidas de algum tipo de criação de objeto matemático. Um fato relevante é que as ações do comando Sequência(), de modo geral, não refletem a ideia de iteração em Matemática estabelecida aqui. Por exemplo, o comando Sequência((2, k), k, 3, 6) fornece a lista {(2, 3), (2, 4), (2, 5), (2, 6)}. Cada iteração acontece sem utilizar o resultado da iteração anterior: o resultado da primeira iteração (2, 3) não foi utilizado na determinação de (2, 4) na segunda iteração.

O comando de repetição do GeoGebra que melhor representa nossa ideia matemática de iteração é o comando que é justamente chamado de Iteração(). A sua estrutura de entrada de dados se dá de duas maneiras:

- Iteração(<função>, <valor inicial>, <número de iterações>)
- Iteração(<Expressão>, <Variáveis>, ... , <Valores Iniciais>, <número de iterações>)

Por exemplo, o comando Iteração(x^2, 3, 3) no GeoGebra produz como resultado o valor 6561, consequência das ações iterativas: $3 \rightarrow 9 = 3^2 \rightarrow 81 = 9^2 \rightarrow 6561 = 81^2$. O comando Iteração() só mostra o resultado produzido na última iteração. Se quisermos ver as etapas iterativas, podemos utilizar o comando ListaDeIteração. Por exemplo, o comando ListaDeIteração(x^2, 3, 3) fornece a lista {3, 9, 81, 6561}. É um exercício interessante tentar produzir essa lista com o comando Sequência() para perceber melhor a diferença de funcionamento e de utilização dos dois comandos iterativos.

## 1.2 O conceito de fractal e procedimentos de determinação do Triangulo de Sierpinski

A escolha por uma definição para o conceito de fractal pode não ser uma tarefa simples, pois não existe uma formalização universalmente aceita para o termo fractal (Krantz, 1989). De fato, até mesmo o conceito de fractal pode variar. Além do mais, algumas definições podem não ser adequadas para nossos propósitos didáticos do assunto, como a seguinte: Um conjunto é dito um fractal se sua dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente sua dimensão topológica (Mandelbrot, 1982). Encontramos definições mais intuitivas: Um fractal é um conjunto cujas partes se assemelham ao seu todo sob alguns aspectos (Feder, 1988). Porém esse tipo de definição necessitaria de informações mais precisas para o devido tratamento das ideias matemáticas envolvidas. De qualquer modo, o fato é que não encontramos uma única definição que contemple todos os exemplos de conjuntos que costumam ser chamados de fractal.

Por conta de nosso interesse em processos iterativos, adotamos a mesma visão de Barbosa (2005) e pensamos, aqui, em fractal como um subconjunto do plano, ou do espaço, que é autossimilar, conforme definição que desenvolveremos a seguir e baseada em Falconer (2004). Conjuntos autossimilares englobam um número grande de fractais conhecidos e estudados no contexto de ensino e aprendizagem de Matemática, como: Conjunto de Cantor, Triângulo e Tapete de Sierpinski, Esponja de Menger, Curva e Ilha de Koch e Dragão de Harter-Heighway.

Para definirmos conjunto autossimilar, precisamos estabelecer alguns termos preliminares. Os conjuntos dos números naturais e dos números reais são denotados por $\mathbb{N}$ e $\mathbb{R}$, respectivamente. Consideramos transformações do plano $\mathbb{R}^2$, mas as ideias a seguir se estendem para o espaço $\mathbb{R}^3$. Uma semelhança de razão $r$ é a transformação dada por $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, f(v) = r.v$, ou dada por sua composição com uma isometria (que preserva distância: translação, rotação e reflexão). Homotetias são exemplos de semelhanças. Dados $S_1$ e $S_2$ dois subconjuntos de $\mathbb{R}^2$, dizemos que $S_2$ é similar (ou semelhante) a $S_1$ se existe uma semelhança $f$ tal que $S_2 = f(S_1)$, isto é, $S_2$ é imagem de $S_1$ por uma semelhança.

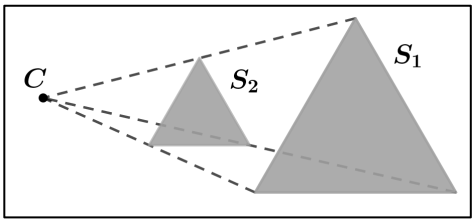


**FIGURA 1**: $S_2$ é similar à $S_1$, segundo uma homotetia.
**FONTE:** Construção do autor.

Para o conceito de fractal, utilizamos as semelhanças de razão $r$ entre 0 e 1, exclusive, que chamaremos de semelhanças de contração. Um subconjunto $S$ de $\mathbb{R}^2$ é dito autossimilar (ou autossemelhante) se pode ser escrito na forma $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup \ldots \cup f_k(S)$, onde $f_1, f_2, \ldots, f_k$ são semelhanças de contração e $k$ pertence a $\mathbb{N}$. Um exemplo simples de figura autossimilar é o quadrado. Se $Q$ representa um quadrado cheio, ele pode ser escrito como $Q = f_1(Q) \cup f_2(Q) \cup f_3(Q) \cup f_4(Q)$, onde $f_1, f_2, f_3, f_4$ são homotetias de fator 0,5 e centro em cada vértice de $Q$, respectivamente.

Detectar ou reconhecer figuras autossimilares não é tarefa trivial. Não é à toa que figuras assim já foram chamadas de monstros matemáticos (Barbosa, 2005). Por exemplo, dadas três homotetias de fator 0,5, $f_1, f_2, f_3$, a formação de uma imagem mental da figura $T$ que satisfaz $T = f_1(T) \cup f_2(T) \cup f_3(T)$ não parece algo intuitivo. Essa figura é conhecida como Triângulo de Sierpinski, mas não é verificando a igualdade que a visualizamos. Normalmente, desenvolvemos uma imagem mental do Triângulo de Sierpinski pela utilização de um processo de construção que se generaliza para qualquer figura autossimilar.

Sejam $f_1, f_2, \ldots, f_k$ semelhanças de contração. Seja $E$ subconjunto de $\mathbb{R}^2$ tal que $f_i(E) \subset E$, para todo $i = 1, ..., k$. Definimos por recorrência a seguinte sequência de conjuntos associada ao sistema $(E, f_1, f_2, \ldots, f_k)$:

- $E_0 = E$,
- $E_{n+1} = f_1(E_n) \cup f_2(E_n) \cup \ldots \cup f_k(E_n)$, se $E_n$ está definido.

Cabe observar o aspecto algorítmico dessa sequência. A partir do conjunto de base $E$, chamado de nível 0 (ou de iteração 0) da construção, temos os conjuntos $E_n$, com $n \geq 1$, produzidos por iterações e chamados de nível $n$ (ou de iteração $n$) da construção. O resultado de cada iteração é utilizado como dado de entrada na iteração seguinte. Considerando esse aspecto, é comum chamar o sistema $(E, f_1, f_2, \ldots, f_k)$ de sistema de funções iteradas.

Agora consideramos o conjunto $S = \bigcap_n E_n$, com $n$ pertencente a $\mathbb{N}$. Se o conjunto de base $E$ é fechado, é possível provar que $S$ é um conjunto compacto diferente de vazio tal que $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup \ldots \cup f_k(S)$, ou seja, tal $S$ obtido pela interseção de uma família infinita de conjuntos é o que chamamos de autossimilar. Ainda é possível provar que $S$ obtido a partir de tal sistema de funções iteradas é único e independe da escolha do conjunto fechado de base $E$. Esses resultados podem ser conferidos em Falconer (2004).

Como, neste artigo, fractal é sinônimo de conjunto autossimilar, podemos formalizar o conceito.

Definição: Dizemos que $S \subset \mathbb{R}^2$ é um fractal se existem semelhanças de contração $f_1, f_2, \ldots, f_k$ tais que $S = f_1(S) \cup f_2(S) \cup \ldots \cup f_k(S)$.

Esta definição estabelece fractal como um objeto, mas também apresentamos o processo que permite construir tais figuras. Vejamos como podemos utilizar esse processo para visualizar o Triângulo de Sierpinski descrito anteriormente. Sejam $f_1$, $f_2$ e $f_3$ homotetias de fator 0,5 e centro $V_1$, $V_2$ e $V_3$, respectivamente. A construção original idealizada por Sierpinski supunha que os vértices formavam um triângulo equilátero $E$, considerando também o interior da figura, e utilizava tal figura como conjunto de base para o processo iterativo de construção. Assim, $E_0 = E$ é o nível 0 da construção e o nível 1 é dado por $E_1 = f_1(E_0) \cup f_2(E_0) \cup f_3(E_0)$. A Figura 2 ilustra três níveis da construção, em que o segundo desses conjuntos é o resultado da aplicação de três homotetias sobre a figura de base. O terceiro conjunto é resultado da aplicação de três homotetias sobre o nível 1 da construção. O leitor pode observar, na Figura 2, como o terceiro conjunto é a união de três figuras similares ao conjunto do nível anterior. Procedendo de forma iterativa, temos o nível $n + 1$ dado por $E_{n+1} = f_1(E_n) \cup f_2(E_n) \cup f_3(E_n)$, sempre que o nível $n$ for estabelecido.

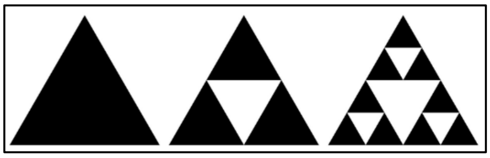

**FIGURA 2**: Ilustração de duas etapas do processo de construção do Triângulo de Sierpinski.
**FONTE:** Construção do autor.

É fundamental observar que as figuras envolvidas no processo não são partes do Triângulo de Sierpinski. Na verdade, é o contrário, temos que esse fractal está contido na figura obtida em cada iteração, pois o processo de construção de um fractal diz que o Triângulo de Sierpinski é o conjunto $T$ dado por: $T = \bigcap_n S_n$, com $n$ pertencente a $\mathbb{N}$. Ressaltamos que $T \subset S_n$, para todo número natural $n$.

Para terminar a seção, considerando o que vamos analisar mais adiante, cabe explicar que o processo descrito para a construção de fractais por meio de iterações sucessivas envolvendo semelhanças de contração é mais comumente interpretado como um processo de construção por remoção. No caso ilustrado do Triângulo de Sierpinski, a ideia é dividir o triângulo inicial, o nível 0 da construção, em quatro triângulos congruentes e retirar o triângulo central. Essa ação se repete com cada triângulo menor obtido e, assim, se define um processo iterativo infinito. Dessa forma, o conjunto do meio da Figura 2 representa o resultado da primeira iteração de remoção e o conjunto da direita representa o resultado da segunda iteração de remoção.

Deixamos, por fim, uma versão em forma de algoritmo dos dois principais métodos de construção do Triângulo de Sierpinski como referência para as próximas seções.

Algoritmo 1: (Construção por semelhanças de contração)

- Passo 1, considere um triângulo equilátero;
- Passo 2, aplique as três homotetias de razão 0,5 e centro em cada vértice do triângulo do Passo 1;
- Passo 3, repita o Passo 2 sobre a figura obtida.

Algoritmo 2: (Construção por remoção)

- Passo 1, considere um triângulo equilátero;
- Passo 2, considerando os pontos médios de seus lados e dividindo o triângulo em quatro triângulos congruentes, retire o triângulo central;
- Passo 3, considere cada triângulo restante e volte ao passo 2.

## 2. Uma nova construção para o Triângulo de Sierpinski

Encontramos três tipos de fontes para conhecermos sobre a representação de Fractais por meio de construções no GeoGebra: artigos científicos; construções no repositório do GeoGebra.org e vídeos no YouTube. Sobre artigos, buscando pelo localizador da internet Google Acadêmico e usando as palavras-chave GeoGebra, fractal, comando e iteração, obtivemos 193 resultados, incluindo repetições, mas nenhum tratava de construções utilizando o comando Iteração() de fato. A situação é semelhante realizando buscas no YouTube e na página do GeoGebra.org. Então, nos concentramos em um único caso de fractal, o Triângulo de Sierpinski, e buscamos por artigos que tratassem dessa figura no GeoGebra.

Selecionamos 11 publicações que tratam da construção do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra. A saber, Cunha (2013), Padilha, Dullius e Quartieri (2013), Reis (2014), Adami, Soares e Souza (2017), Novi (2018), Barbosa e Da Silva (2019), De Aguilar, Da Silva e Romanini (2019), Xavier, Correa, Treml e Grossi (2019), Campos (2020) e Santos (2021) e Wanderley, Souto, Didier e Tanaka (2021).

A quase totalidade dessas publicações utiliza o algoritmo de remoção. Só duas publicações aplicam semelhanças de contração no processo. Uma publicação aborda o fractal usando o Jogo do Caos, uma forma alternativa de produzir o Triângulo de Sierpinski. Sete publicações abordam a construção dos níveis utilizando as ferramentas do programa, só quatro apresentavam uma representação do fractal utilizando um código obtido pela entrada de comandos do programa. O cenário entre as construções encontradas no YouTube e no GeoGebra.org não é muito diferente. O destaque é que encontramos referência a dois outros algoritmos para a obtenção do Triângulo de Sierpinski. Em https://www.GeoGebra.org/m/XZD8RFGd, construção no GeoGebra desenvolvida por Marco A. Manetta, o processo é análogo ao da construção da curva de Hilbert. Em https://www.youtube.com/watch?v=SOL5iCK1L1o, processo explicado no YouTube, o algoritmo usado é baseado em uma única homotetia de fator 0,5, de cada nível produzido, seguida de dois movimentos de rotação. Os dois algoritmos utilizados são bastante particulares, conforme comentaremos melhor na Seção 3.

## 2.1 Uma construção no GeoGebra como referência

A partir das construções no GeoGebra do Triângulo de Sierpinski encontradas em nossa pesquisa documental, considerando aquelas que implementam um algoritmo, optamos por desenvolver nossa própria construção tendo como modelo a construção apresentada em Wanderley, Souto, Didier e Tanaka (2021). Ela é baseada em uma variação do Algoritmo 2 citado na Seção 1.2 e se destaca pela utilização do comando de repetição do GeoGebra Sequência() e do comando Homotetia().

Esta seção é dedicada a uma breve explicação da construção modelo. Ela parte de um triângulo equilátero e da construção do triângulo central, que, nessa adaptação do Algoritmo 2, compõe o Passo 1. Organizando os vértices do triângulo original de forma bastante esperta como uma lista do GeoGebra, o algoritmo tem início com a utilização de três homotetias do triângulo central, de razão 0,5 e centro em cada vértice, respectivamente. Em vez de utilizarem o comando Homotetia() repetidamente, três vezes, um para cada vértice, recorreram a um comando de repetição. Assim, a primeira iteração do passo 2 ficou implementada com o comando

- Sequência(Homotetia(l2, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3).

No comando, l1 é a lista criada com os três vértices do triângulo e l2 é a lista de um único elemento formada com o triângulo central tomado como base para o processo de retirada. A letra i no comando é a variável que define as repetições e assume valores de 1 até 3. O resultado do comando é a lista l3 formada por três triângulos.

O passo 3 consistiu em considerar o resultado do passo 2, a lista l3, e voltar para o passo 2. Na construção do artigo essa iteração aconteceu mais quatro vezes com os autores escrevendo o comando do passo 2 repetidamente:

- Sequência(Homotetia(l3, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3),
- Sequência(Homotetia(l4, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3),
- Sequência(Homotetia(l5, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3),
- Sequência(Homotetia(l6, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3).

As listas l4, l5 e l6 são as listas geradas pelo GeoGebra ao final do passo 2 de cada iteração, são o resultado do comando Sequência. O último comando gerou a lista l7.

Na Janela de Visualização do GeoGebra, as listas obtidas de cada iteração do passo 2 são dadas por conjuntos de triângulos que servem para a representação do Triângulo de Sierpinski. Para que fosse produzido o efeito do processo de formação do fractal, utilizou-se o controle deslizante.

Resumindo essa breve descrição da construção em Wanderley, Souto, Didier e Tanaka (2021), com relação à questão da utilização repetida de um mesmo comando, identificamos a utilização do comando de repetição Sequência() como recurso para evitar a escrita repetida do comando Homotetia(). Foi a identificação da repetição desse comando que nos inspirou na criação de uma nova construção.

## 2.2 Nossa construção no GeoGebra

Agora apresentamos, desta vez em mais detalhes, a construção no GeoGebra do produto principal do presente artigo. Esperamos, em particular, que o leitor possa ser capaz de reproduzir a construção a partir de nossas explicações. Mas, se preferir, poderá acessá-la pelo endereço: https://www.GeoGebra.org/m/zx4csgvf.

O recurso de homotetia foi fundamental para a construção descrita na seção anterior. Nos baseamos em sua utilização. Contudo, percebemos que seria mais natural utilizar o método de construção do Triângulo de Sierpinski por meio de semelhanças de contração, sem recorrer à interpretação de remoção. Assim, buscamos implementar nossa construção de acordo com o Algoritmo 1 exposto na Seção 1.2.

A construção começa com um triângulo equilátero. Não utilizamos o sistema de coordenadas da Janela de Visualização, simplesmente selecionamos a ferramenta Polígono Regular, marcamos dois pontos da Janela de Visualização e preenchemos o campo Vértices com o valor 3. Mudamos a cor do triângulo para um cinza claro e dos vértices para preto, e desabilitamos a exibição dos lados do triângulo. Também criamos a lista de vértices, escrevendo no Campo de Entrada {A, B, C}.

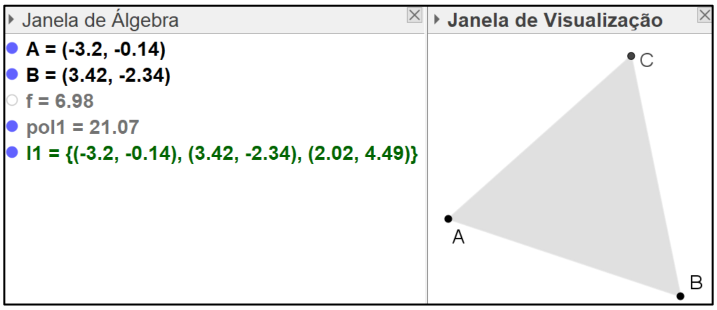


**FIGURA 3**: Primeira etapa de nossa construção no GeoGebra.
**FONTE:** Construção do autor.

A seguir iniciamos o processo iterativo. Partimos da ideia da construção analisada na seção anterior e olhamos para a estrutura de repetição:

- Sequência(Homotetia(pol, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3),

Nesse comando, pol é uma variável para receber o polígono que for utilizado no passo 2 do Algoritmo 1 de cada iteração. O valor de pol vai mudar ao final de cada etapa de iteração. A variável l1 foi definida pelo programa, quando criamos a lista com os vértices, ela é mantida constante.

O problema mesmo é como estruturar as repetidas ações de redução, no passo 2. Resolvemos isso utilizando o comando Iteração() com a seguinte estrutura: Iteração( <Expressão>, <Variáveis>, <Valores Iniciais>, <Contagem>). Segundo o Algoritmo 1, o valor inicial deve ser o triângulo ABC, já construído e nomeado por pol1, a expressão é a sequência de 3 homotetias sobre a figura recebida pol. Precisamos do elemento de contagem, o número de iterações, ou seja, o número de etapas para o processo de construção do Triângulo de Sierpinski. Assim, precisamos criar um controle deslizante, ele foi nomeado por n e variava em {0, 1, 2, 3, 4, 5}. A estrutura de repetição dada pelo comando de Iteração() ficou assim:

- Iteração(Nivelar(Sequência(Homotetia(pol, 0.5, Elemento(l1, i)), i, 1, 3)), pol, {{pol1}}, n).

Como o leitor pode verificar, tivemos que utilizar também o comando Nivelar(). Isso foi necessário porque o comando Iteração cria uma lista de listas e, por alguma razão com respeito às estruturas dos comandos envolvidos, e que não sabemos explicar, a ferramenta Homotetia não funcionava com o resultado pol da iteração anterior.

Criando o controle deslizante e escrevendo o comando Iteração() como estruturamos, terminamos nossa construção. É só isso mesmo. Na Figura 4, o resultado do comando Iteração() é a lista l2.

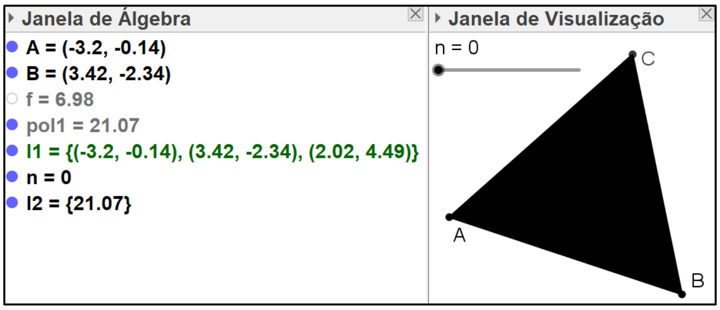


**FIGURA 4**: Construção final.
**FONTE:** Construção do autor.

Quando n = 0, a construção exibe a figura original, agora em preto. Fazendo n variar, obtemos as seguintes figuras.

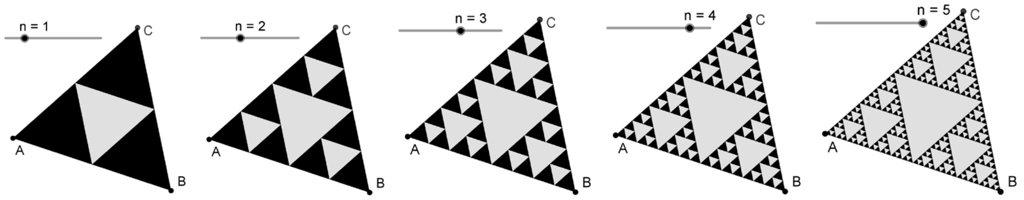


**FIGURA 5**: Processo de construção do Triângulo de Sierpinski.
**FONTE:** Construção do autor.

## 3. Explorando nossa construção

Iniciamos a pesquisa com o intuito de desenvolver maior familiaridade com o conceito de fractal e com construções de modelos no programa GeoGebra, em um contexto didático. Nossa pesquisa documental e a atenção para a formalização do conceito de fractal foram importantes para o sucesso da construção, mas também serviram para notarmos outros aspectos.

A identificação de comandos repetitivos nos motivou a utilizar o comando Iteração(). O resultado foi a implementação de uma construção muito mais simples, eficiente e até versátil. É interessante comparar a quantidade de elementos presentes na Janela de Álgebra de nossa construção com a de outras construções que podemos encontrar em artigos, YouTube ou no GeoGebra.org. A nossa construção ficou com uma estrutura consideravelmente mais simples. Por exemplo, não precisamos construir o triângulo central utilizando os pontos médios de cada lado do triângulo inicial, etapa anterior ao processo iterativo. Ou seja, a implementação do Passo 1 ficou mais simples e imediata.

Não queremos inferir que nossa construção seja de fácil entendimento, no sentido de que usuários do GeoGebra não terão dificuldades em aplicar os métodos envolvidos em novas situações. Contudo, percebemos que sua simplicidade a transforma em uma ferramenta de grande potencial didático. Por exemplo, se quisermos trabalhar atividades de ensino do tipo investigativa (Ponte, Brocado, Oliveira, 2013), a simplicidade da construção, que se baseia em poucos parâmetros, facilita obtermos variações bem interessantes. Assim, um estudante com conhecimentos básicos de uso do GeoGebra pode facilmente realizar pequenas alterações a fim de buscar respostas para perguntas do tipo "E se ... ?:

- E se o triângulo de base não for equilátero?
- E se a figura de base for diferente do triângulo ABC?
- E se o triângulo ABC não estiver contido na nova figura de base?
- E se utilizarmos um fator de contração diferente de 0,5?
- E se considerarmos só duas homotetias?
- E se considerarmos o processo agora com quatro pontos dados?
- E se quisermos observar, no GeoGebra, a área de cada figura iterada?

Vamos ilustrar como algumas dessas questões podem ser abordadas. Podemos trabalhar com um triângulo que não seja equilátero simplesmente trocando a figura de base pol1, definida originalmente por pol1 = Polígono(A, B, 3). Basta redefinir, pelo Campo de Entrada do GeoGebra, pol1 = Polígono(A, B, C), sendo que agora A, B e C são pontos quaisquer da Janela de Visualização. Com essa atualização, podemos obter uma representação para outros Triângulos de Sierpinski, como os da Figura 6. O usuário pode obter essas variações de figuras arrastando livremente os pontos A, B e C. É curioso, mas muitas referências sobre a construção do Triângulo de Sierpinski não comentam que a figura de base não precisa ser um triângulo equilátero.

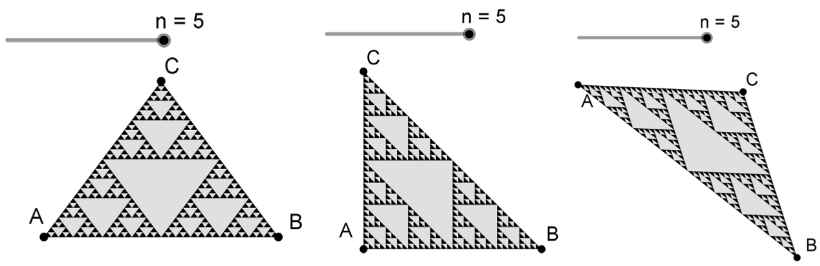


**FIGURA 6**: Triangulo de Sierpinski a partir de vértices arbitrários.
**FONTE:** Construção do autor.

E se a figura de base for diferente do triângulo ABC? Essa pergunta é interessante, quando vemos, na Seção 1.2, que a determinação da figura limite pelo sistema de funções iteradas independe do conjunto de base. Para responder a essa pergunta, exploramos a situação redefinindo pol1 por meio de objetos diferentes do GeoGebra. Por exemplo, na Figura 7, vemos a reprodução de nossa construção a partir de pol1 = Círculo(A, B, C), círculo definido por três de seus pontos. Na Figura 8, usamos pol1 = Polígono(A, B, 4), quadrado dados dois vértices consecutivos.

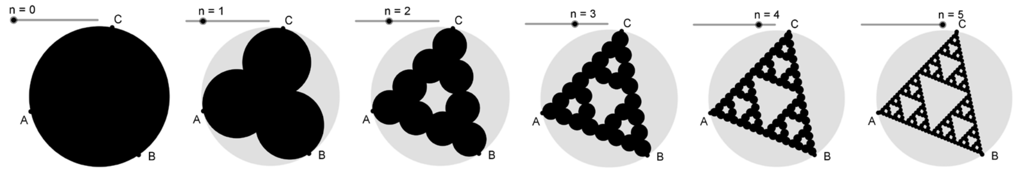

**FIGURA 7**: Triângulo de Sierpinski gerado a partir de um círculo.
**FONTE:** Construção do autor.

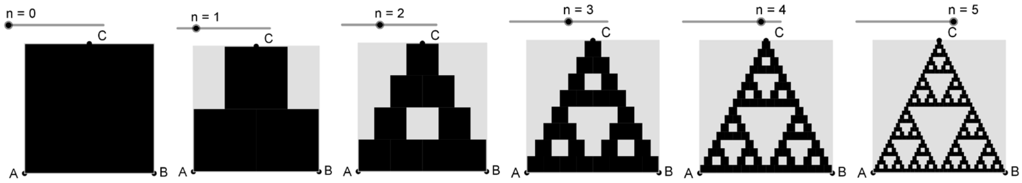

**FIGURA 8**: Triângulo de Sierpinski gerado a partir de um quadrado.
**FONTE:** Construção do autor.

A última questão listada, sobre observar a área em cada etapa iterativa, é interessante por ser associada a atividades escolares que envolvem fractais, como as de explorar área, perímetro e progressões aritmética e geométrica. Trabalhos como Côrtes e Antunes (2014) e Barbosa (2005) mostram a viabilidade desse tipo de abordagem no ensino escolar. Em nossa construção, a lista l2 formada pelas figuras iteradas e mostrada na Janela de Álgebra do GeoGebra já fornece a área de cada componente que compõe a figura iterada. Assim, apenas adicionando o comando Soma(l2) na construção, o aluno já produz o resultado da área total. Fazendo o controle deslizante variar, podemos anotar a sequência de valores de área que tende para o valor da área do fractal.

Estamos explorando a simplicidade, eficiência e versatilidade de nossa construção. Outras construções, mesmo não sendo tão simples quanto a nossa, podem ser alteradas para a criação de novas situações, mas isso não acontece com todas, e não para qualquer situação. Construções baseadas no método de formação da Curva de Hilbert e baseadas em rotações de 120º, conforme indicado no início da Seção 2, só funcionam se os vértices dados formarem um triângulo equilátero. Construções baseadas no método de remoção, a maioria encontrada, só funcionam, a princípio, se a base for um triângulo. O Jogo do Caos utilizado em Campos (2020) funciona para qualquer terno de vértices, mas não é desenvolvido em forma de código e estabelecendo um algoritmo. Contudo, fizemos um teste e foi possível utilizar o comando Iteração() para uma versão do Triângulo de Sierpinski similar a nossa construção, mas baseada em um algoritmo novo que representa o Jogo do Caos. O leitor interessado está convidado para a realização dessa construção como exercício.

Podemos aplicar nossa construção no estudo de outros fractais. Com a mediação de um professor, se necessário, um estudante pode facilmente adaptar nossa construção para obter uma representação do Tapete de Sierpinski, quando adotamos um quadrado como figura de partida e consideramos oito homotetias de fator 1/3 e centro variando entre os vértices do quadrado e os pontos médios de seus lados. Para ilustrar esse tipo de variação, adaptamos nossa construção de estudo e obtivemos uma nova que modela o Tapete de Sierpinski, sendo que a construção é basicamente a mesma, a estrutura é exatamente a mesma, só mudando parâmetros. O resultado pode ser encontrado em https://www.GeoGebra.org/m/fkqms7np. Curiosidade, se mudarmos, na construção, o parâmetro de variação do comando Sequência(), trocando o número 3 por 2, o sistema de funções iteradas fica só com duas homotetias e a figura gerada é o Conjunto de Cantor.

Nossa pesquisa documental revelou que construções no GeoGebra para estudos com o Triângulo de Sierpinski encontradas se enquadram em um dos dois tipos de trabalho com recursos da Geometria Dinâmica declarados por Alves e Soares (2003). Temos as construções como atividade de expressão, quando o estudante implementa as etapas que levam ao Triângulo de Sierpinski, e temos as construções como atividade de exploração, quando elas já são apresentadas prontas, e o estudante observa as etapas recursivas que levam ao fractal e eventualmente explora propriedades como valor da área e do perímetro. Considerando o aspecto investigativo em que nossa construção pode ser envolvida, entendemos que ela poderia ser encaixar em uma terceira categoria não considerada por Alves e Soares (2003), quando o estudante recebe a construção pronta e pode observá-la, mas também pode explorar a estrutura da construção e realizar variações dela a fim de tratar questões abertas e de testar conjecturas, de acordo com o conceito de Investigação Matemática de Ponte, Brocado e Oliveira (2013), por exemplo. Sugerimos o termo atividade de investigação para esse terceiro tipo de trabalho com recursos da Geometria Dinâmica. Para saber se cabe fazer uso desse termo, seria necessário investigar sobre sua efetiva utilização, talvez em pesquisas já realizadas voltadas para a aprendizagem de Matemática mediada pelo GeoGebra, certamente em novos trabalhos voltados especificamente para esse objetivo. Uma opção seria investigar sobre o desempenho de alunos utilizando nossa construção para o Triângulo de Sierpinski.

## 4. Conclusão

Estávamos interessados na realização de uma construção no GeoGebra que representasse um fractal e que evitasse comandos repetidos, de preferência utilizando o comando Iteração(). A pesquisa documental e uma boa revisão do conceito de fractal viabilizaram a realização da tarefa. Apoiado em construções já conhecidas e na conceituação de fractal, formal e procedimental, conseguimos obter uma construção: simples, no sentido de não apresentar comandos repetidos; eficiente, no sentido de utilizar o mínimo de recursos do programa; versátil, no sentido de se adaptar a outras situações por meio de pequenas mudanças de configuração.

Na Seção 3 exploramos nossa construção e fizemos uma breve análise sobre o potencial didático desse tipo de construção. Considerando que nossa pesquisa é exploratória e, assim, tem como principal objetivo proporcionar maior familiaridade com o assunto colocado, não tivemos a pretensão de fazer maiores inferências, apenas de tentar construir hipóteses em torno do ensino e aprendizagem de matemática escolar envolvendo fractais e em torno da utilização do GeoGebra. A partir do que foi explorado, acreditamos que podemos deixar algumas sugestões de novas pesquisas. Propomos uma nova interpretação para a utilização de construções no GeoGebra, ou seja, como atividade de investigação. Nesse caso, o aluno receberia a construção pronta e realizaria investigações explorando variações da construção, que seriam realizadas pelo próprio educando. Conjecturamos que um aluno com conhecimentos básicos de utilização dos comandos do programa GeoGebra conseguiria fazer essa exploração, algo que poderia ser mais bem avaliado em uma pesquisa de campo. Outra questão, o interesse por construções de fractais no GeoGebra é muito grande, mas nenhum trabalho considerou a utilização do comando Iteração(). Para esta pesquisa encontramos pouquíssimas referências da utilização desse comando. Indicamos pesquisas a respeito de outras situações matemáticas que envolvem construções no GeoGebra que eventualmente poderiam ser melhoradas com a utilização do comando Iteração().

## Referências

ADAMI, P. S.; SOARES, E. A. F.; SOUZA, L. F. R. GeoGebra e o Triângulo de Sierpinski: Uma intervenção Pedagógica para o Ensino Médio. **Revista Eletrônica de Educação e Ciência - REEC**, v. 7, p. 44-61, 2017.

ALVES, G. S.; SOARES, A. B. Geometria Dinâmica: um estudo de seus recursos, potencialidades e limitações através do software Tabulae. In: **Anais do Workshop de Informática na Escola**, 2003. p. 175-186.

BARBOSA, R. M. **Descobrindo a Geometria Fractal para a sala de aula**. Belo Horizonte: Autêntica, 2005.

BARBOSA, L. M.; DA SILVA, R. S. R. Sobre pensamento computacional na construção de um Triângulo de Sierpinski com o GeoGebra. **Pesquisa e Debate em Educação**, v. 9, n. 1, p. 537-559, 2019.

CAMPOS, F. A. B. **O ensino de matemática com fractais na educação básica: percepções em meio ao curso enfrac**. 106 f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Ciências e Matemática) - Programa de Pós-graduação em Ensino de Ciências e Matemática, Universidade do Estado de Mato Grosso, Barra do Bugres, 2020.

CÔRTES, I. R. C.; ANTUNES, G. Geometria fractal no ensino médio: teoria e prática. **Revista eletrônica da Sociedade Brasileira de Matemática**, v.2, n.1, p. 26-41, 2014.

CUNHA, M. M. **Progressão Aritmética, Geométrica e Fractais**. 89 f. Trabalho de conclusão de curso (Mestrado Profissional) - Universidade Federal do Mato Grosso do Sul, [S. l.], 2013.

DE AGUILAR, V. L.; DA SILVA, R. C.; ROMANINI, E. Geometria Fractal: abordando conceitos a partir de construções com o Software GeoGebra. **Revista Ensin@ UFMS**, v. 1, n. 4, p. 52-72, 2019.

FALCONER, K. **Fractal geometry:** mathematical foundations and applications. John Wiley & Sons, Chichester, 2004.

FEDER, J. **Fractals**. Plenum Press, New York, 1988.

FRISKE, A. L.; MATHIAS, C. V. Fractais do tipo Dürer e GeoGebra: uma aplicação para as Transformações Lineares. **REMAT: Revista Eletrônica da Matemática**, v. 1, n. 2, p. 32-41, 2015.

GIL, A. C. **Como elaborar projetos de pesquisa**. 4. ed. – São Paulo: Atlas, 2002.

KRANTZ, S. G. Fractal geometry. **The Mathematical Intelligencer**, v. 11, n. 4, p. 12-16, 1989.

MANDELBROT, B. B. **The Fractal Geometry of Nature**. W. H. Freeman and Company, New York, 1982.

NOVI, V. C. N. O estudo de Geometria por meio do software GeoGebra no celular. In: PARANÁ. Secretaria de Estado da Educação. Superintendência de Educação. **Os Desafios da Escola Pública Paranaense na Perspectiva do Professor PDE:** Produção Didático-pedagógica, 2016. Curitiba: SEED/PR., 2018. V.2. (Cadernos PDE). Disponível em: http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/portals/cadernospde/pdebusca/producoes_pde/2016/2016_pdp_mat_uel_vandaclaudianogarininovi.pdf. Acesso em: 8/10/23. ISBN 978-85-8015-094-0.

PADILHA, T. A. F.; DULLIUS, M. M.; QUARTIERI, M. T. Construção de fractais usando o software GeoGebra. **Boletim GEPEM**, n. 62, p. 155-162, 2013.

PONTE, J. P.; BROCARDO, J.; OLIVEIRA, H. **Investigações Matemática na sala de aula**. 3 ed. Belo Horizonte: Autêntica, 2013.

REIS, J. N. D. C. **Fractais no ensino médio:** da observação de padrões da natureza ao uso do GeoGebra. Dissertação (Mestrado Profissional em Matemática em Rede Nacional) - Universidade Federal Rural do Seminário, Mossoró, 2014.

SANTOS, A. S. Uma Análise de construções de iterações dos fractais para a formação docente. In.: MENDONÇA, Gustavo Simões et al.. **Formação de professores da educação em Ciências e Matemática em pesquisa:** perspectivas e tendências, v. 1, n. 1, p. 295-313, 2021.

WANDERLEY, L. R.; SOUTO, R. A.; DIDIER, M. C.; TANAKA, T. Y. Construção de Fractais Geométricos com o GeoGebra: Árvores Bifurcadas e o Triângulo de Sierpinski. **Revista do Professor de Matemática**. Rio de Janeiro, n. 104. 2021.

XAVIER, K. L.; CORRÊA, E. B.; TREML, H.; GROSSI, L. Análise sobre os processos de construção do Triângulo de Sierpinski no GeoGebra e Scratch/Analysis of the construction processes of the Sierpinski Triangle in GeoGebra and Scratch. **Brazilian Journal of Development**, v. 5, n. 12, p. 29755-29771, 2019.

Enviado: 23/09/2024

Aceito: 01/05/2025